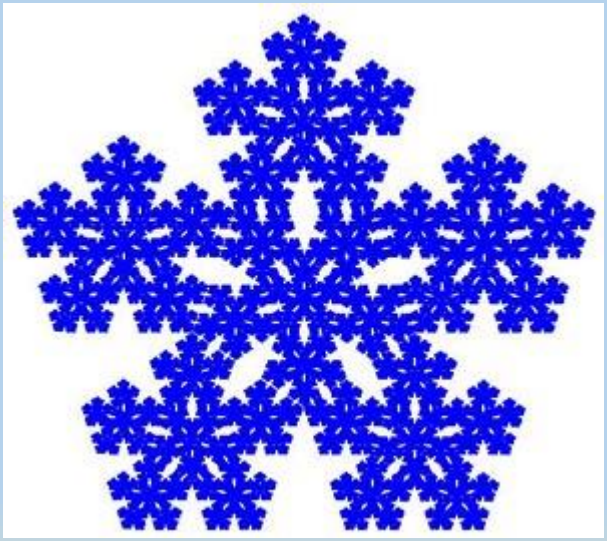
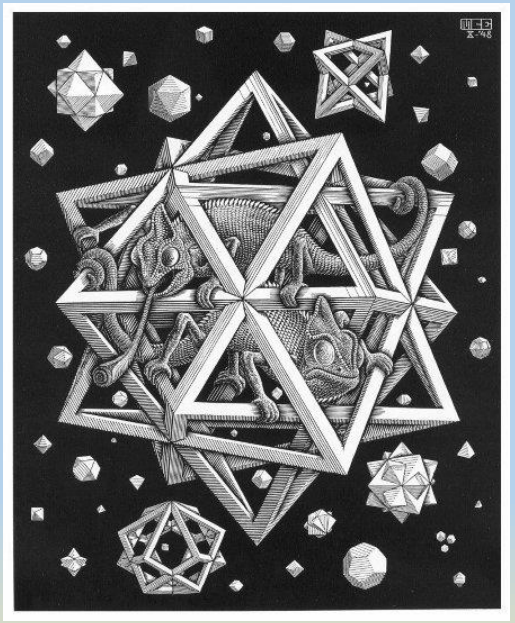




# LA GEOMETRIA “PROTAGONISTA” NELLA SCUOLA

Spunti per insegnare ad affrontare e risolvere problemi geometrici

11 ottobre 2016

# A Clara

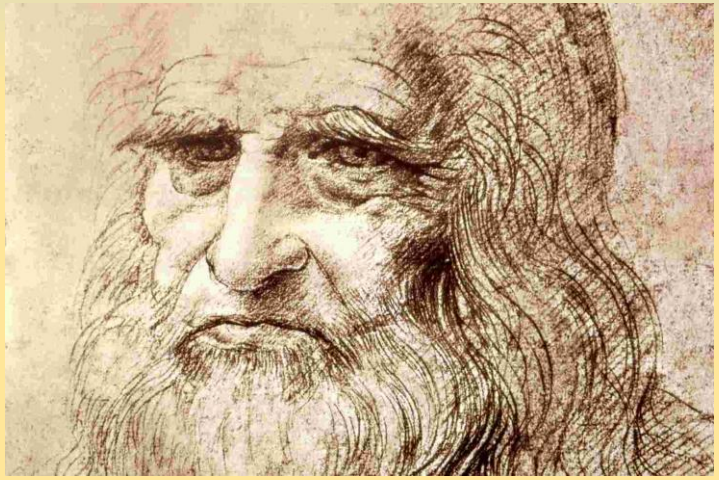
## per le sue grandi dote professionali e umane

Quando non potrai correre, cammina veloce.
Quando non potrai camminare veloce, cammina.
Quando non potrai camminare, usa il bastone.
Però non trattenerti mai.
(Madre Teresa di Calcutta)

È interessante constatare la concretezza della geometria: essa non è una materia astratta, come erroneamente si pensa, ma è realmente presente in tutto ciò che ci circonda. Abbiamo continuamente a che fare con figure geometriche nella nostra routine quotidiana, solo che spesso non ce ne rendiamo conto.

Credo che la repulsione di numerosi studenti verso la matematica e, in particola modo verso la geometria, sia dovuta alla visione atemporale che essi hanno di queste materie, i cui problemi sono considerati lontani da sé e dalla realtà che li circonda. Bisognerebbe far apprezzare gli elementi di libertà, immaginazione e creazione che, certamente, catturerebbero l'interesse dei ragazzi.

**Sì come il mangiare senza voglia fia dannoso alla salute, così lo studio senza desiderio guasta la memoria e non ritien cosa che la pigli.**
**(Leonardo da Vinci)**



Credo che abbiano molto più successo nel far apprendere la geometria agli allievi, quei docenti che utilizzano il metodo: insegnare divertendo. L'insegnante ha, quindi, il dovere di favorire un incontro positivo con questa disciplina, presentarla nel modo più piacevole ed interessante possibile

**"Se la scuola riuscisse a spogliarsi della sua tradizionale veste seriosa e fiscale e se, di conseguenza, le materie venissero insegnate con uno spirito più giocoso, la partecipazione degli studenti e il loro conseguente livello di profitto potrebbero risultare sensibilmente più alti, con una ricaduta, nel tempo, di straordinari benefici sull'intera società".** (Ennio Peres)

"Un tempo, nel Medioevo, Alcuino da York fu chiamato da Carlo Magno per istituire una scuola per i giovani di corte. Lui scrisse per loro un libro di matematica all'interno del quale inserì una cinquantina tra giochi e problemi. L'idea di insegnare la matematica tramite il gioco, quindi, è molto antica, ma si è andata perdendo. La scuola, così, è diventata seriosa e ha tolto questi stimoli. La scuola dovrebbe essere accattivante, coinvolgente, suscitare curiosità: è come se non ci si rendesse conto che **il linguaggio naturale dell'uomo, soprattutto dei bambini, è il gioco.**
(Ennio Peres)

# Geoquiz (giocando con la geometria)

Definisci il poligono
(il poligono è una parte di piano limitata da una spezzata chiusa)

Come si chiamano i lati di un triangolo rettangolo?
(cateti e ipotenusa)

Un quadrilatero con una sola coppia di lati paralleli è un ……
(trapezio)

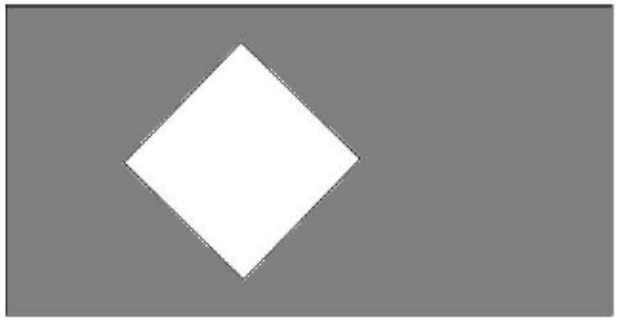
Per calcolare l'area del rombo posso moltiplicare la lunghezza della base per quella dell'altezza? Perché?.....
(Sì perché il rombo è anche un parallelogrammo o romboide)

3 4 5 rappresenta una terna pitagorica? … Perché?
(Sì perché $5^2 = 4^2 + 3^2$)

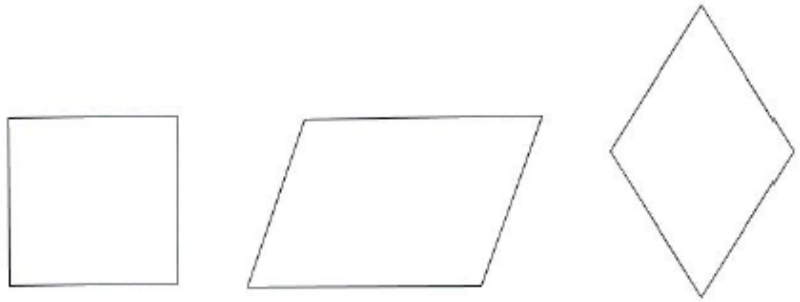
# Qualche riflessione sull'INVALSI

Classe seconda

**18. Andrea ha fatto un buco in un cartoncino:**



**Qual è il pezzo che ha tagliato?**



☐ A. ☐ B. ☐ C.

Risp. Corrette 31%

Classe quinta

**D15. Quali delle seguenti figure rappresentano lo stesso solido visto in due posizioni diverse?**

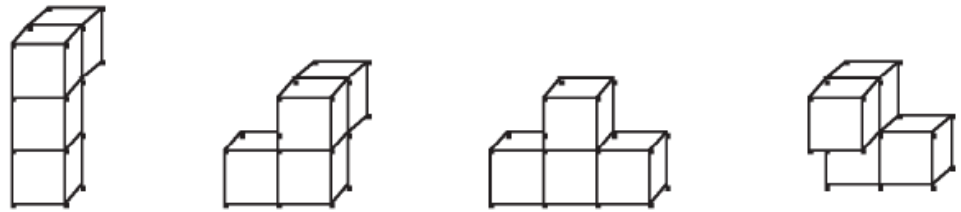


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

☐ A. Figura 2 e Figura 4

☐ B. Figura 1 e Figura 4

☐ C. Figura 2 e Figura 3

☐ D. Figura 1 e Figura 3

**D5. Quale figura corrisponde alla seguente descrizione?**

**"C'È UN QUADRATO DENTRO A UN RETTANGOLO"**

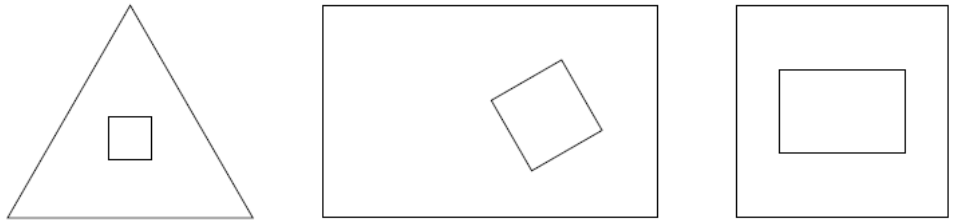
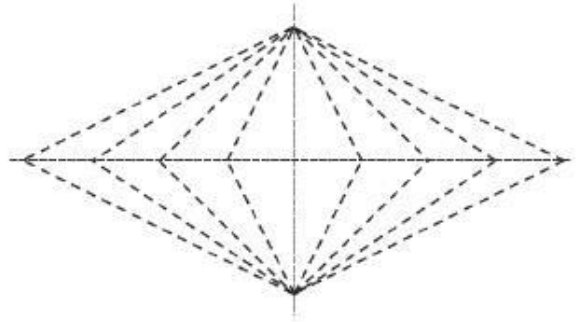


**Figura 1** **Figura 2** **Figura 3**

A. ☐ Figura 1
B. ☐ Figura 2
C. ☐ Figura 3

Cl. II P 2014
Risp. Corrette 54,1% Errate 45%

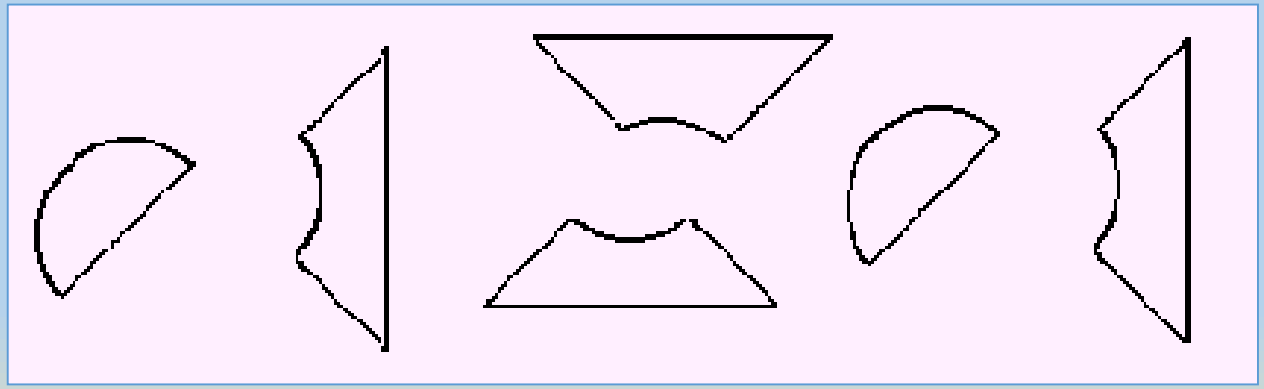
**D9. Cerca il quadrato nella figura qui sotto e ripassane i lati con la penna.**



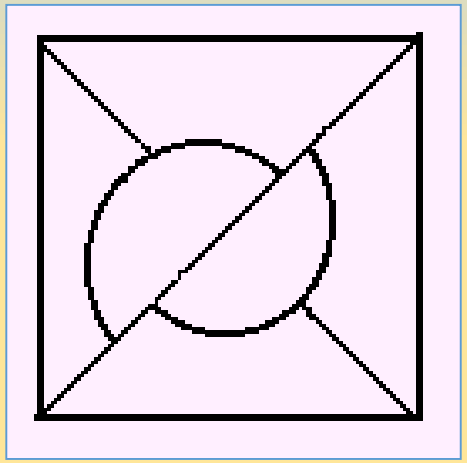
Cl. V P 2011
Risp. Corrette 70% Errate 24,5% NV 5,5%

In questo quesito è richiesta la produzione, guidata, di un quadrato; per la sua realizzazione risulta essere fondamentale prestare attenzione agli angoli, poiché è facile disegnare figure con i lati congruenti

Componi un quadrato con i seguenti pezzi.



La maggior parte inizia tentando a lungo di comporre il quadrato attorno al disco ottenuto con i due semicerchi a disposizione.



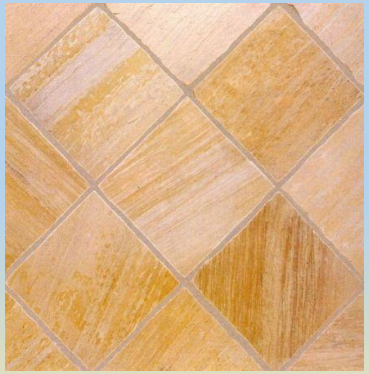
Perché compiti di questo tipo, spesso,  mettono in crisi gli alunni?

L’ostacolo, in casi come questi,  è la mancanza di flessibilità, il ricorso a stereotipi, a schemi rigidi che in esperienze passate si sono rivelati utili, ma che non sono adatti a gestire la situazione attuale...

La scuola ha le sue colpe

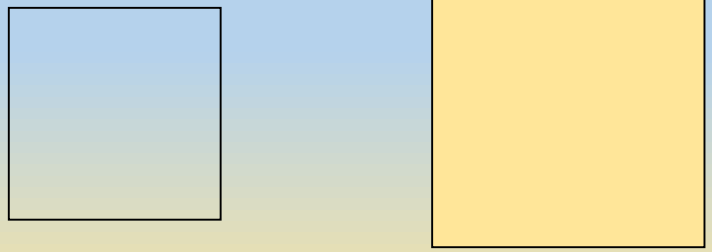
# Il quadrato…

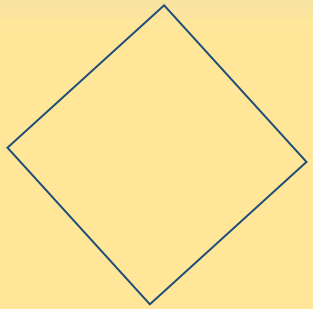
## Nella vita reale



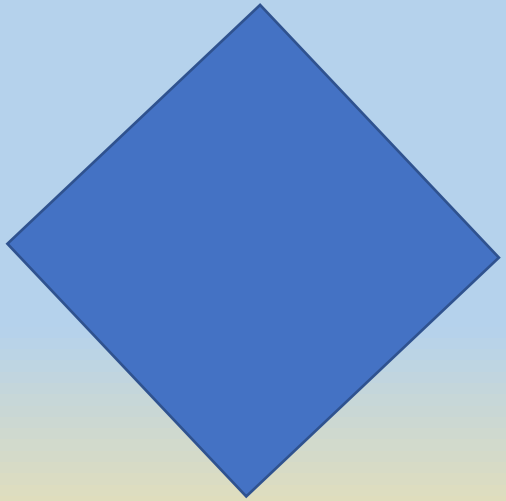
Joseph Albers, *Homage to the Square:* 1962

## Nella scuola





Che cos'è che rende un quadrato QUADRATO?



La congruenza dei

lati e degli angoli!

Tutto il resto (dimensioni, posizione, orientamento,

colore...) può variare, anzi è proprio bene che lo faccia!

# La scuola dovrebbe...

- Promuovere la flessibilità di pensiero

- Favorire un approccio dinamico alla geometria, che prenda in carico il movimento, che non tema i cambiamenti e le trasformazioni, purché siano controllate e controllabili...

*Tutti gli elementi che non sono essenziali alla struttura del concetto devono essere variati per mettere in luce ciò che è costante, ovvero il concetto*
(Dienes, 1966 *matematico*)

# Sono tutti rettangoli? Perché?

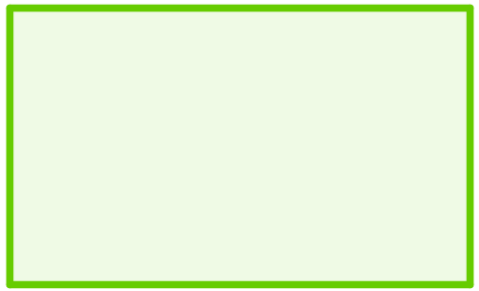


Fig.1

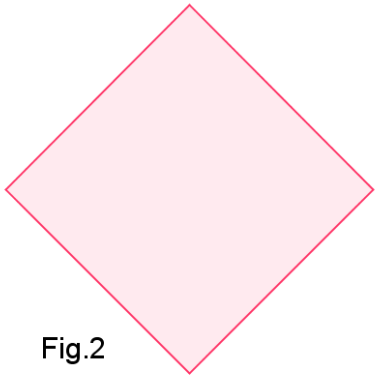


Fig.2

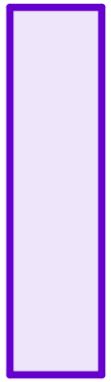


Fig.3

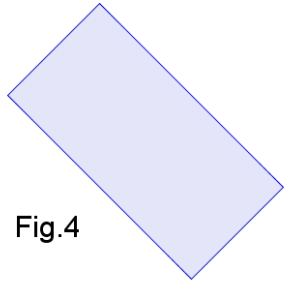


Fig.4

Fig.5

# Sono tutti rettangoli? Perché?

fig.1

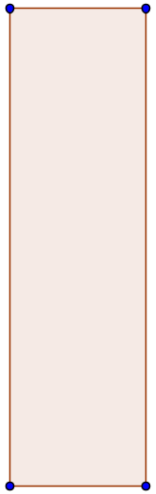


fig.2

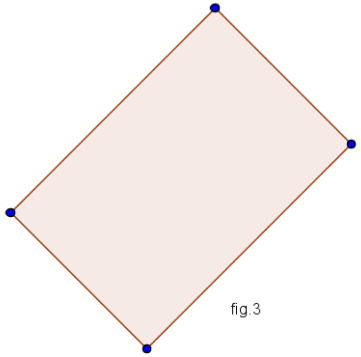


fig.3

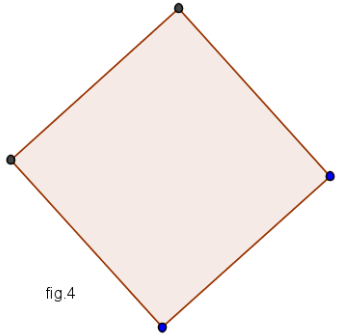


fig.4

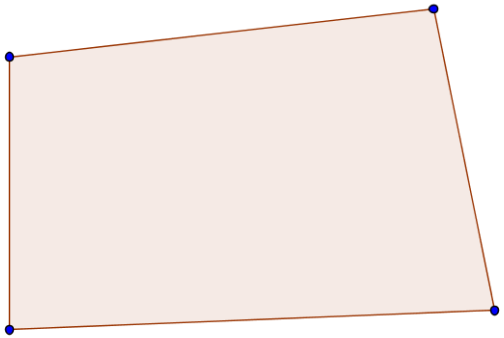
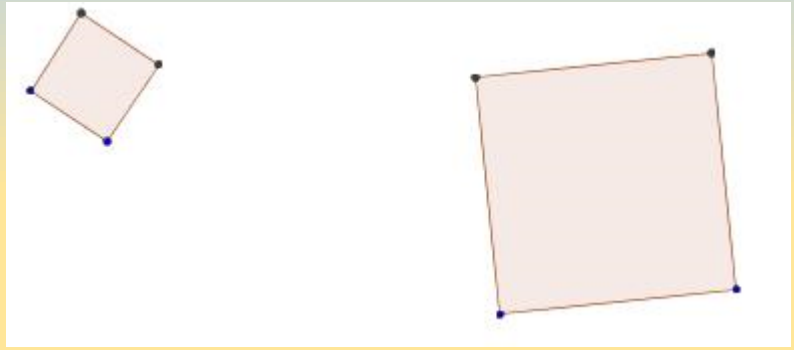
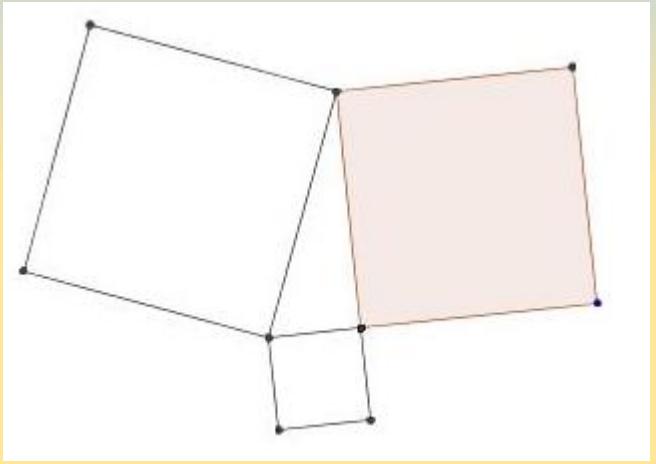


fig.5

# Dai campi sulle sponde del Nilo

"Un contadino egiziano, Nilus, proprietario di un campo di forma quadrata, eredita alla morte del padre un altro campo, sempre di forma quadrata; con l'aiuto di uno scriba e di alcuni arpedonapti, desidera riunire i due appezzamenti, piuttosto distanti, in un unico campo, ancora di forma quadrata, che potrà coltivare più agevolmente.
Se tu fossi lo scriba, che istruzioni daresti agli arpedonapti?





## PERCORSO DIDATTICO

**1)Le relazioni spaziali**

- Spostamenti e posizioni di oggetti nel piano e nello spazio
- Rappresentazione di spostamenti e di posizioni di oggetti nel piano e nello spazio

**2)Le figure geometriche piane e solide**

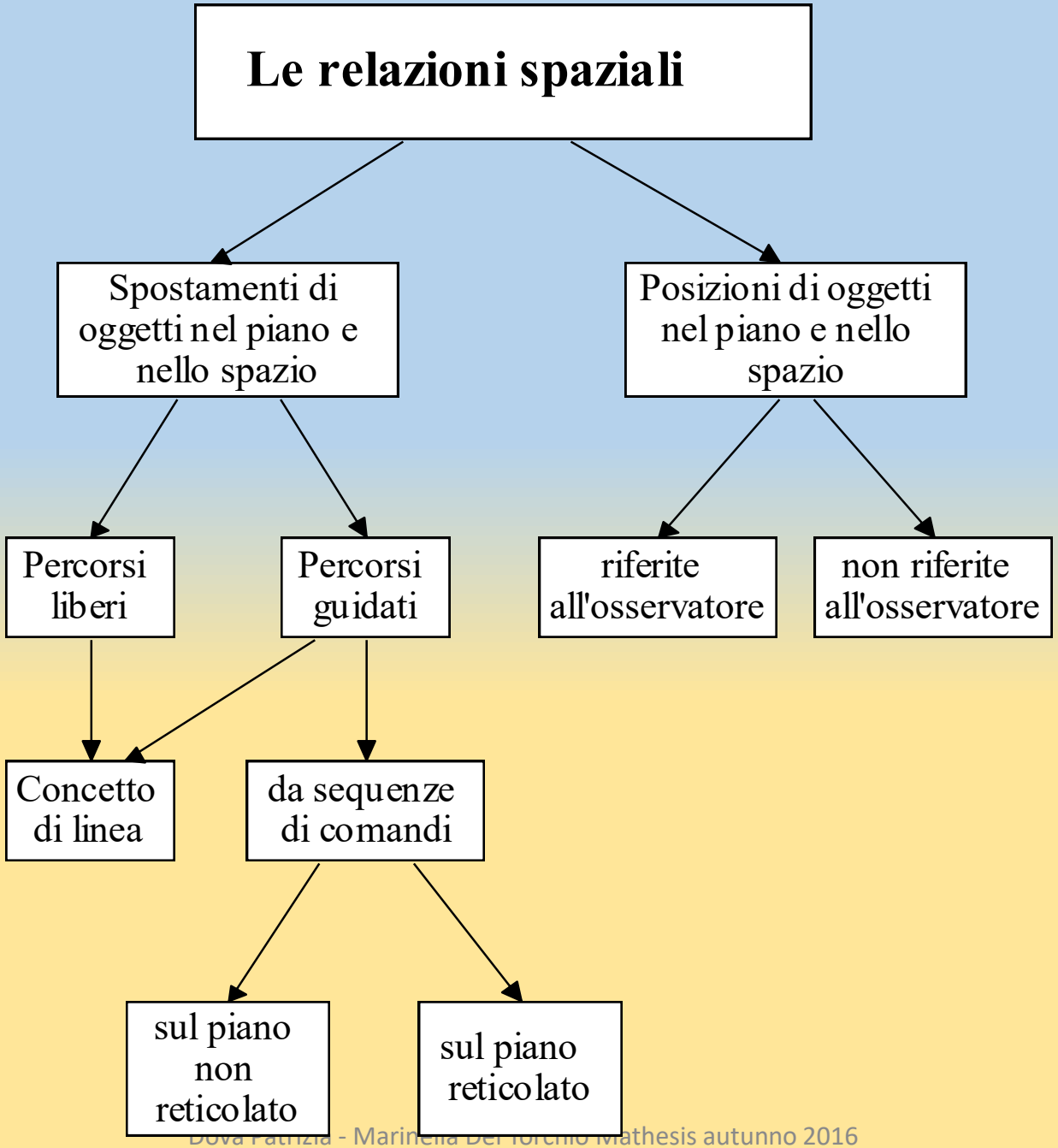
- Lo studio delle linee. Gli angoli.
- Dagli oggetti alle figure geometriche solide e piane
- Studio dei poligoni e dei solidi

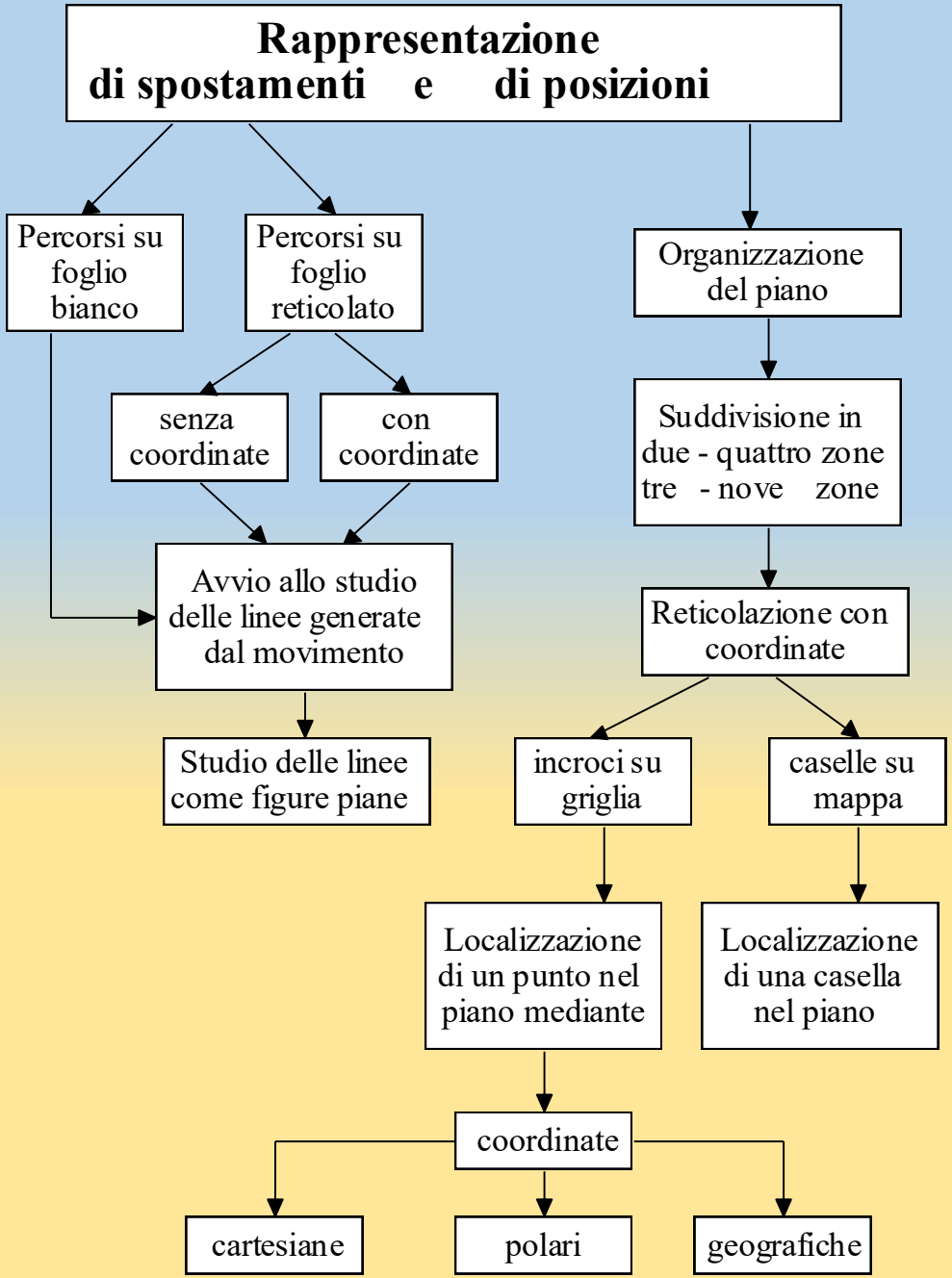
**3)Le trasformazioni geometriche**

- Le simmetrie assiali ortogonali
- Le traslazioni e le rotazioni
- Le omotetie e le similitudini: ingrandimenti e rimpicciolimenti in scala

**4)La misura in geometria**

- Lunghezze, aree, volumi
- Formule per il calcolo delle aree


Le relazioni spaziali
Spostamenti di oggetti nel piano e nello spazio
Posizioni di oggetti nel piano e nello spazio
Percorsi liberi
Percorsi guidati
riferite all'osservatore
non riferite all'osservatore
Concetto di linea
da sequenze di comandi
sul piano non reticolato
sul piano reticolato


Rappresentazione
di spostamenti e di posizioni
Percorsi su foglio bianco
Percorsi su foglio reticolato
senza coordinate
con coordinate
Avvio allo studio delle linee generate dal movimento
Studio delle linee come figure piane
Organizzazione del piano
Suddivisione in due - quattro zone tre - nove zone
Reticolazione con coordinate
incroci su griglia
caselle su mappa
Localizzazione di un punto nel piano mediante
Localizzazione di una casella nel piano
coordinate
cartesiane
polari
geografiche

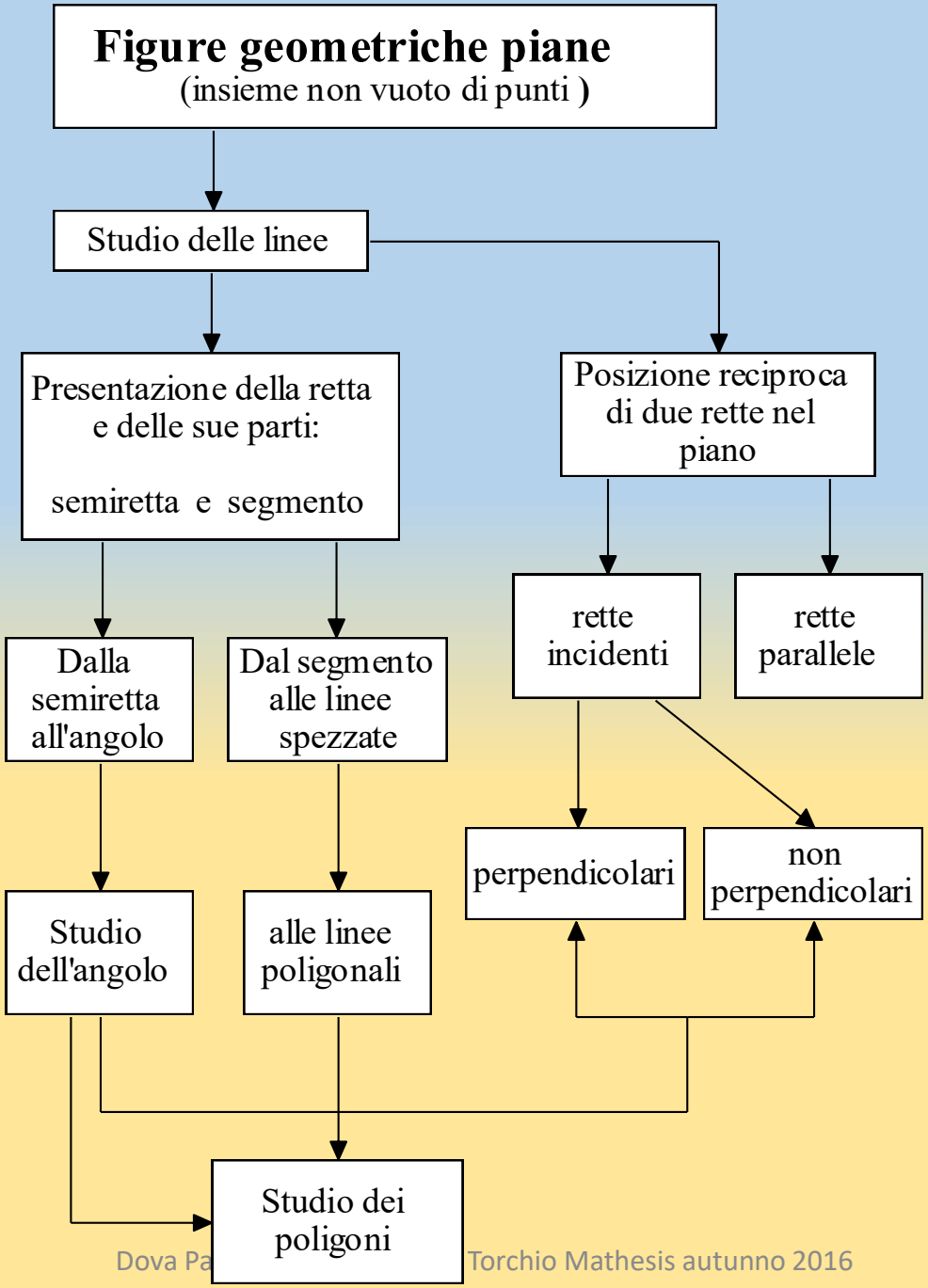


Figure geometriche piane
(insieme non vuoto di punti )
Studio delle linee
Presentazione della retta e delle sue parti:
semiretta e segmento
Posizione reciproca di due rette nel piano
Dalla semiretta all'angolo
Dal segmento alle linee spezzate
rette incidenti
rette parallele
Studio dell'angolo
alle linee poligonali
perpendicolari
non perpendicolari
Studio dei poligoni

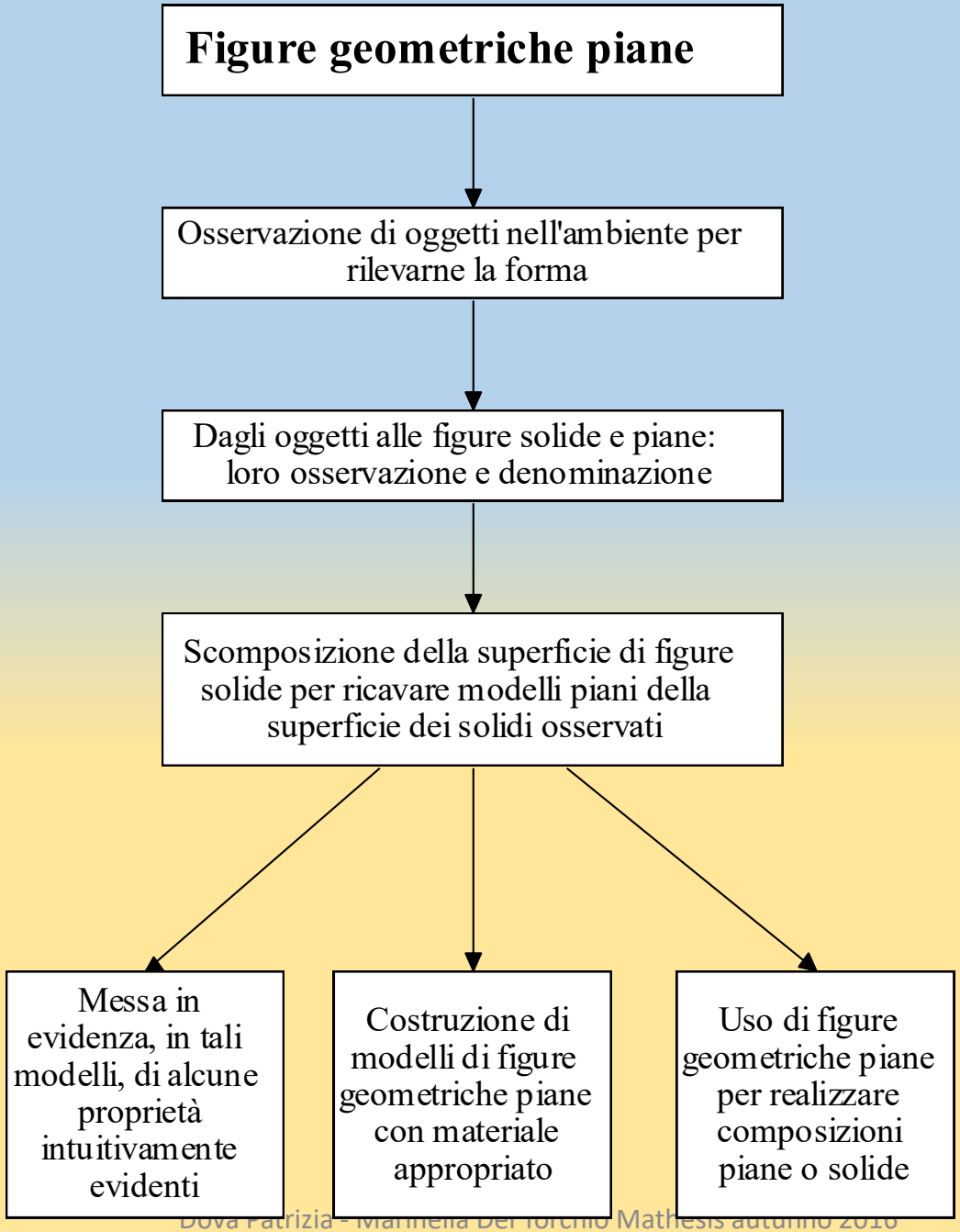
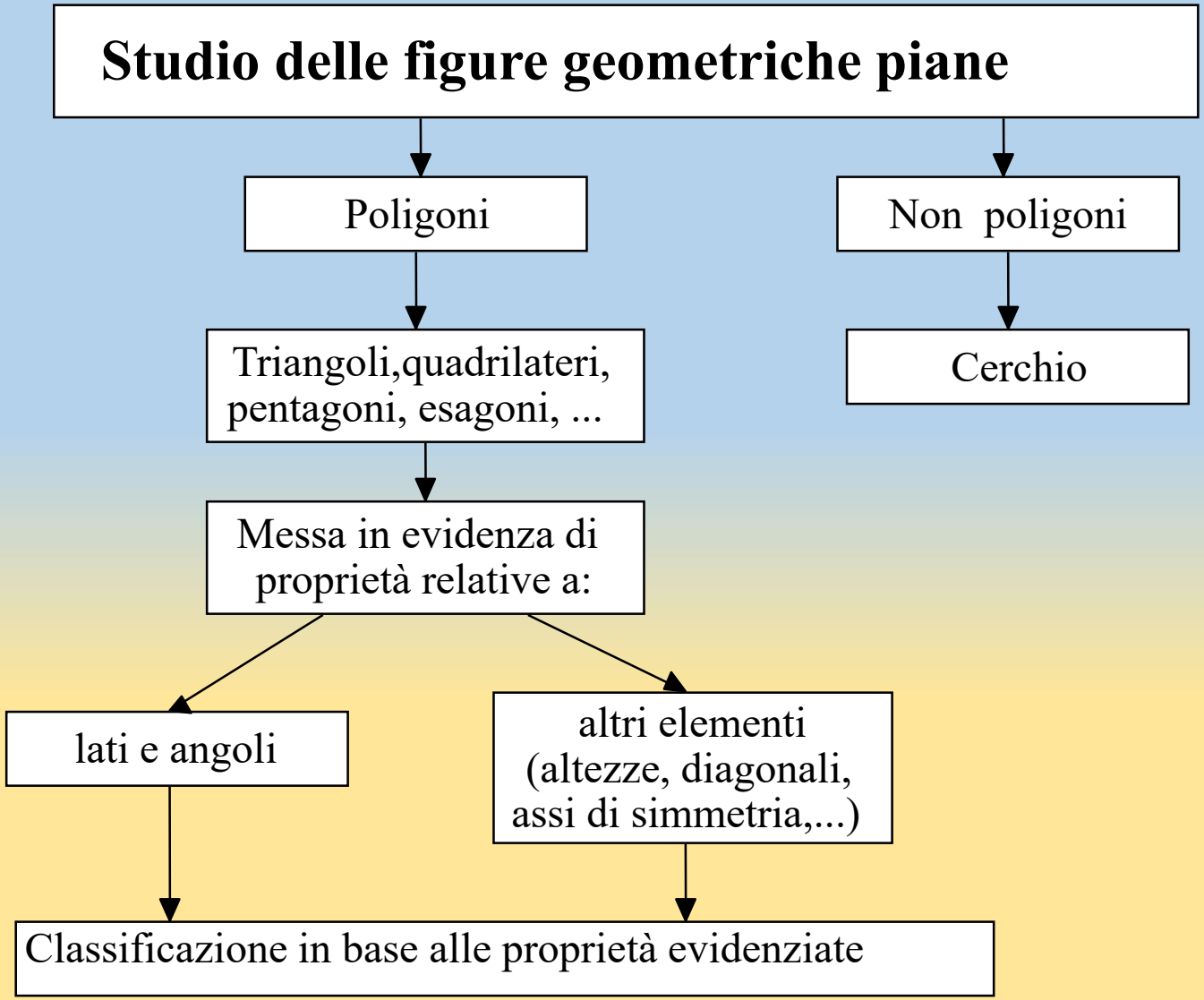


Figure geometriche piane
Osservazione di oggetti nell'ambiente per rilevarne la forma
Dagli oggetti alle figure solide e piane: loro osservazione e denominazione
Scomposizione della superficie di figure solide per ricavare modelli piani della superficie dei solidi osservati
Messa in evidenza, in tali modelli, di alcune proprietà intuitivamente evidenti
Costruzione di modelli di figure geometriche piane con materiale appropriato
Uso di figure geometriche piane per realizzare composizioni piane o solide


Studio delle figure geometriche piane
Poligoni
Non poligoni
Triangoli,quadrilateri, pentagoni, esagoni, ...
Cerchio
Messa in evidenza di proprietà relative a:
lati e angoli
altri elementi (altezze, diagonali, assi di simmetria,...)
Classificazione in base alle proprietà evidenziate

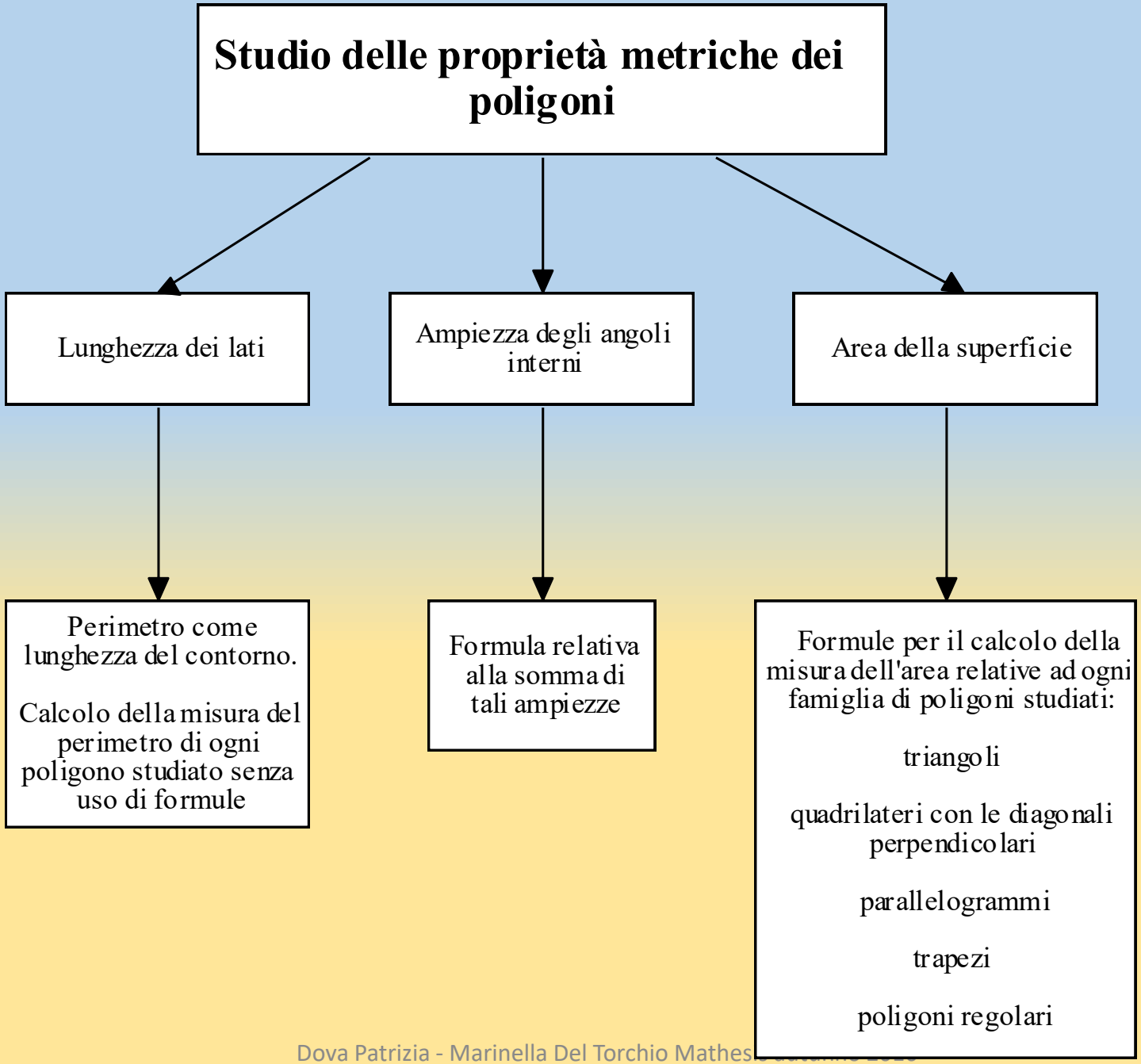
**Studio delle figure geometriche solide**

↓

Prima conoscenza, denominazione e costruzione di alcuni semplici solidi con materiale appropriato

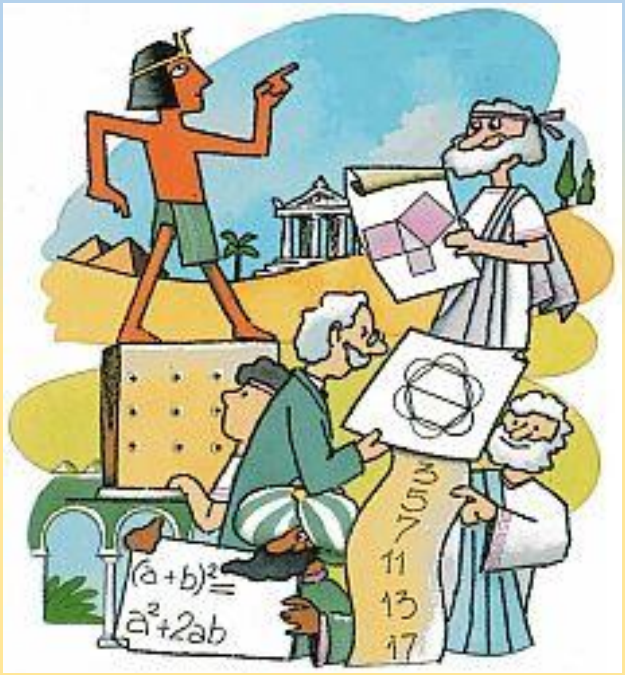
↓

Messa in evidenza, nei poliedri, di alcuni elementi: facce, spigoli, vertici


Studio delle proprietà metriche dei poligoni
Lunghezza dei lati
Ampiezza degli angoli interni
Area della superficie
Perimetro come lunghezza del contorno.
Calcolo della misura del perimetro di ogni poligono studiato senza uso di formule
Formula relativa alla somma di tali ampiezze
Formule per il calcolo della misura dell'area relative ad ogni famiglia di poligoni studiati:
triangoli
quadrilateri con le diagonali perpendicolari
parallelogrammi
trapezi
poligoni regolari

# GEOMETRIA

## CENNI STORICI



La geometria, come dice il nome, nacque dall'esigenza pratica di misurare porzioni di terreno.

In genere si crede che la geometria applicata sia nata in Egitto; in realtà il più antico documento oggi conosciuto dell'attività matematica dell'uomo risale alla **civiltà sumerica**, che fiorì nella Mesopotamia attorno al **terzo millennio a. C.**.
A tale civiltà attinsero i **Babilonesi (1800 a.C.)** i quali si dedicarono ad uno studio approfondito della geometria applicata sia per creare meravigliose architetture, sia per vincere le inondazioni e incanalare le piene.

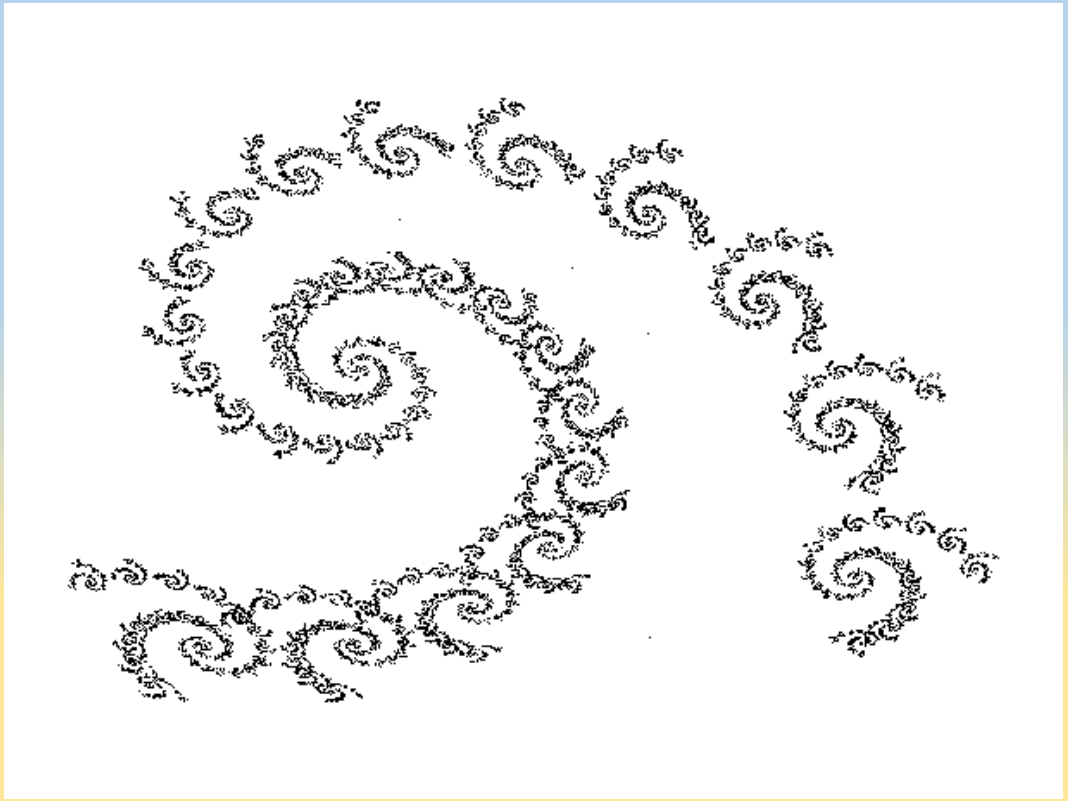
Da Babilonia questa scienza trasmigrò in **Egitto e nel VI secolo a.C. Talete avrebbe portato in Grecia**, dall'Egitto, il gusto della ricerca geometrica. Tale ricerca venne progressivamente affinata, ampliata ed eretta a sistema nel corso di **tre secoli.**

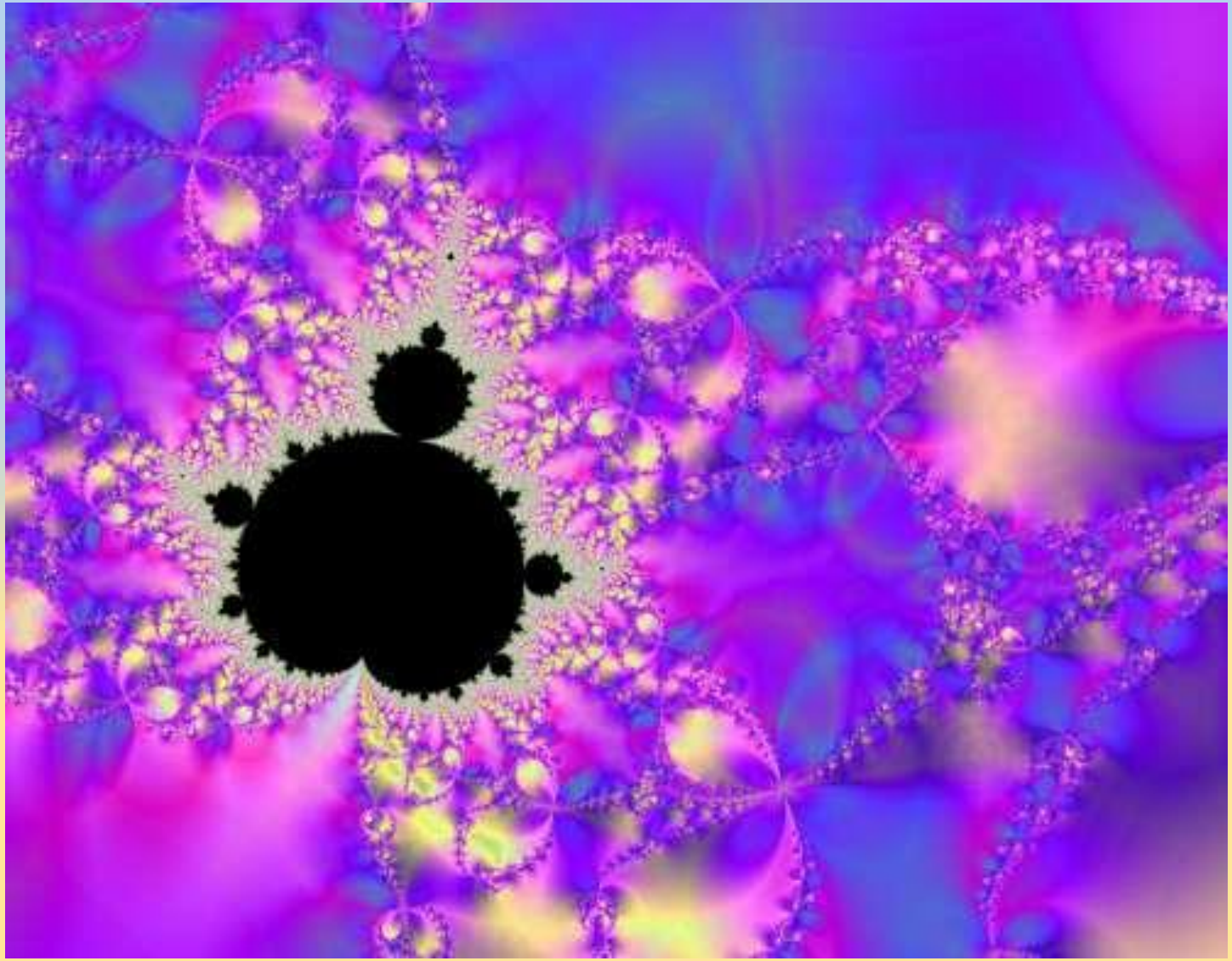
**Gli stadi di sviluppo della geometria** possono essere così schematizzati:

| | | |
|---|---|---|
| 600 -500 a.C. | **Talete** | Basi intuitive per i primi |
| | **Pitagora** | teoremi |
| 400 a.C. | **Zenone** | Scoperta di paradossi |
| 300 a.C. | **Eudosso** | Basi assiomatiche per la |
| | **Euclide** | "geometria euclidea" |

| | | |
|---|---|---|
| 1596-1650 d.C. | **Cartesio** | Nascita della "geometria analitica" |
| 1593-1662 | **Desargues** | Fondatore, con altri, della "geometria proiettiva" |
| 1707-1783 | **Eulero** | Iniziatore, con altri, della "topologia" |
| 1777-1855 | **Gauss** | Scoperta delle "geometrie non euclidee" |
| 1826-1866 | **Riemann** | Da Riemann nel 1851, con i contributi di **Möbius, Jordan, Betti, Kronecher, Cantor, Poincaré** è iniziato lo sviluppo della topologia. |

| | | |
|---|---|---|
| 1862-1934 | **Hilbert** | Sistemazione della "geometria euclidea" |
| 1849-1925 | **Klein** | Impiego del concetto di **gruppo** per "unificare e caratterizzare" le varie geometrie. |
| 1864-1909 | **Minkowski** | Applicazioni delle geometrie non euclidee al mondo fisico. |
| 1879-1955 | **Einstein** | |
| 1924 | **Mandelbrot** | Teorico della geometria dei "frattali" (1975) |



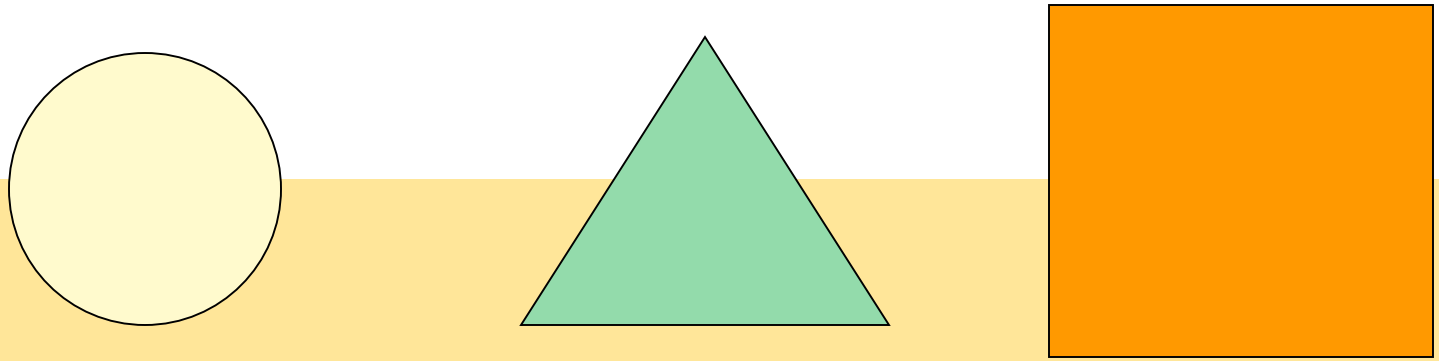


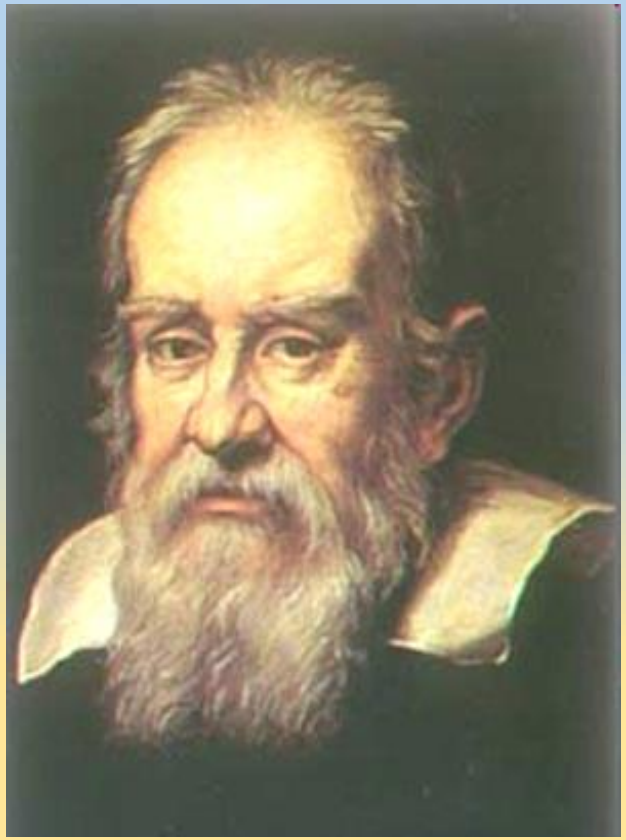
# L’apprendimento e l’insegnamento della geometria

- *La geometria: primo capitolo della fisica*

Galileo Galilei (1564-1642) nel dialogo “Il saggiatore” scrive: “La filosofia [o scienza della natura] è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto inanzi a gli occhi (io dico l’universo), ma non si può intendere se prima non si impara a intendere la lingua e conoscer i caratteri, ne’ quali è scritto.

Egli è scritto in *lingua matematica*, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi non è possibile intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto".





Per Galileo, dunque, la *matematica è la chiave per interpretare la realtà e la geometria, in particolare, è il primo strumento per la sua lettura.*

Tale preminenza è confermata dalla Storia della Scienza, dato che la geometria è stata la prima conoscenza umana razionalizzata ed elevata ad un livello scientifico.

# LO SPAZIO DELLA GEOMETRIA È LO SPAZIO FISICO REALE?

## Cos'è lo spazio?

Il termine nella nostra lingua è usato con diversi significati :

- nel senso comune (per esempio, per indicare una superficie non occupata da corpi, il "luogo" immenso dei corpi celesti, una "estensione" che contiene i corpi)
- in ambiti disciplinari (per esempio, in matematica si parla di spazio topologico, affine, metrico, euclideo, vettoriale, bidimensionale, tridimensionale, degli eventi, …)

si può affermare quanto Sant'Agostino sostiene a proposito del tempo: "cos'è dunque il tempo [lo spazio]? Se nessuno mi interroga, lo so; se volessi spiegarlo a chi m'interroga, non lo so"

In questo contesto il termine SPAZIO denota

l'ambiente reale, concreto in cui si svolge la nostra esistenza, ciò che percepiamo attraverso i nostri sensi, la variazione dei toni muscolari e il movimento, che è al di fuori del nostro corpo e che cominciamo a scoprire sin dai nostri primi gesti finalizzati alla nutrizione.

Questo spazio, qualificato come spazio fisico, è **tridimensionale**, **limitato**, **anisotropo**, avendo la verticale come direzione privilegiata, non omogeneo.

Esso è il punto su cui innestare il processo di costruzione del concetto astratto e formale di spazio geometrico,

Lo spazio fisico non è lo spazio della geometria

La geometria non è una scienza sperimentale

La geometria si caratterizza come primo capitolo della fisica nel senso che

*permette di organizzare* in modo

razionale, rigoroso, preciso, obiettivo, comunicabile senza ambiguità

le esperienze e le conoscenze del mondo fisico.

“Non esiste nel mondo fisico nulla che corrisponda ai concetti astratti di retta, e di triangolo, non si possono quindi “misurare” gli angoli di un triangolo (astratto), né affermare che nello spazio fisico sia verificata una determinata geometria (astratta). Le proprietà […] dei corpi possono essere rappresentate da una teoria astratta soltanto in modo più o meno approssimato. La geometria euclidea ci dà questa rappresentazione con una approssimazione ampiamente sufficiente per tutte le esigenze della pratica” (Fano).

# *Quale rapporto tra figure e disegni?*

***figura***

ente ideale, sottoinsieme di punti in uno spazio geometrico,
non presente nella realtà, ma che la realtà può richiamare

***disegno***

rappresentazione "materiale" di una figura

⇩

imperfetto e particolare

⇩

figura individuata completamente dalla sua definizione geometrica, solo questa è base sicura per la deduzione corretta di tutte le proprietà della figura stessa.

# LA GEOMETRIA NELL'APPRENDIMENTO ELEMENTARE

Il processo di costruzione della conoscenza geometrica
prende le mosse dall'***esperienza*** del soggetto
e a tale conoscenza torna per guidare un comportamento critico e razionale sulla realtà.

Dall'esperienza alla geometria attraverso
***astrazione*** dalle sensazioni
***specializzazione e formalizzazione*** del linguaggio.

**ESPERIENZA**

mediante l' **ASTRAZIONE**

- prescinde da alcune proprietà (colore, peso, temperature, …)

- concentra l'attenzione solo su alcune proprietà (forma, dimensione, posizione nell'ambiente, …)

- spinge al «limite» altre proprietà (punto privo di estensione, retta illimitata, …)

**IMMAGINI MENTALI**

ulteriore **ASTRAZIONE**

- relazionare immagini mentali
- costruire strutture di informazioni

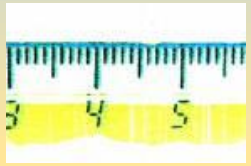
**CONCETTI GEOMETRICI**

# I MODELLI

Nelle applicazioni scientifiche per studiare oggetti e fenomeni , si fa spesso ricorso ai MODELLI.

Il MODELLO non è l'oggetto, ma è la riproduzione o la rappresentazione di un oggetto o di una struttura che mantiene solo alcune delle sue caratteristiche :

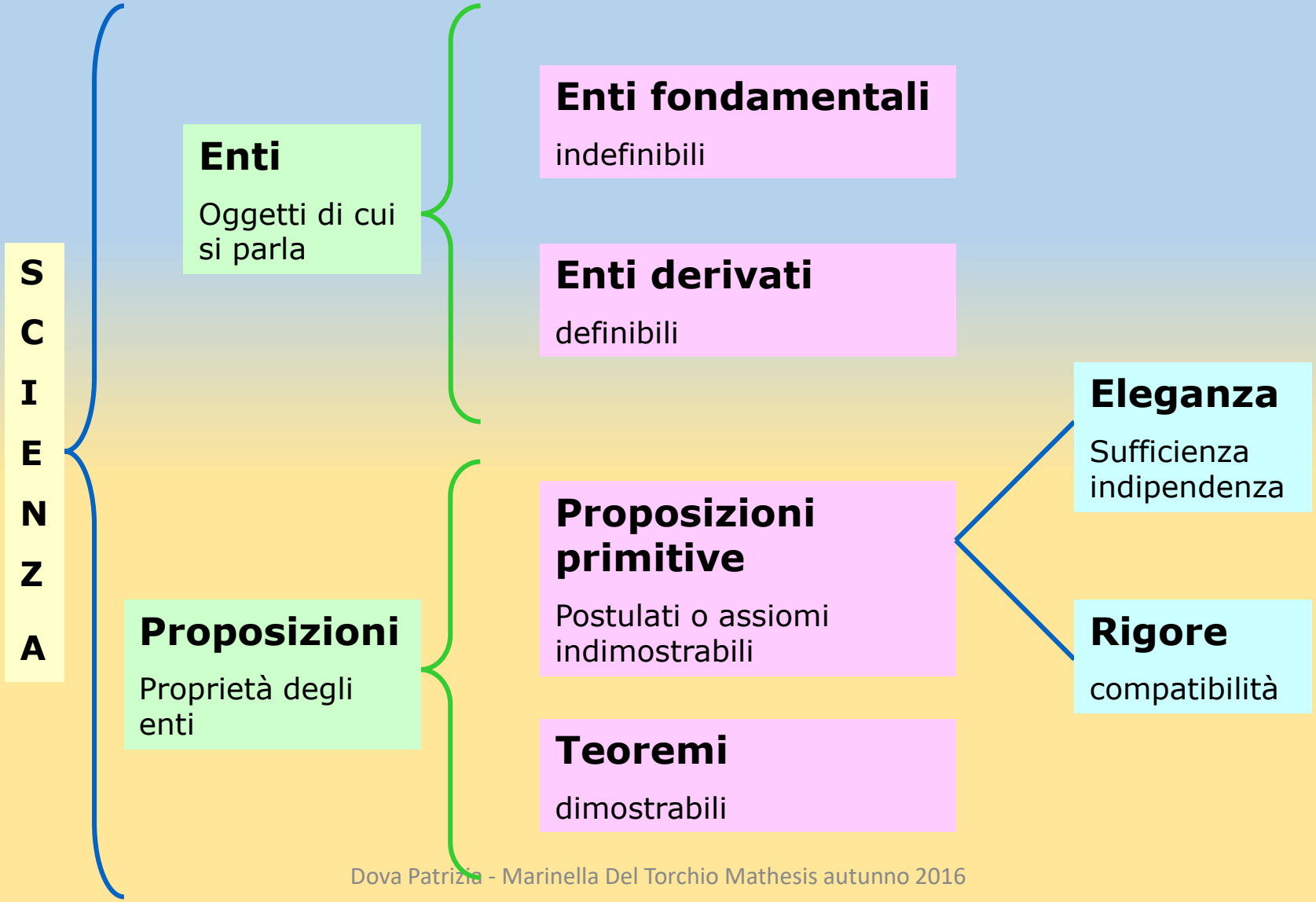
- il COLORE
- il MATERIALE
- le DIMENSIONI
- la FORMA
- il FUNZIONAMENTO ecc



***Noi lavoreremo con i***

***modelli degli enti geometrici***

# Modello di scienza ipotetico - deduttivo



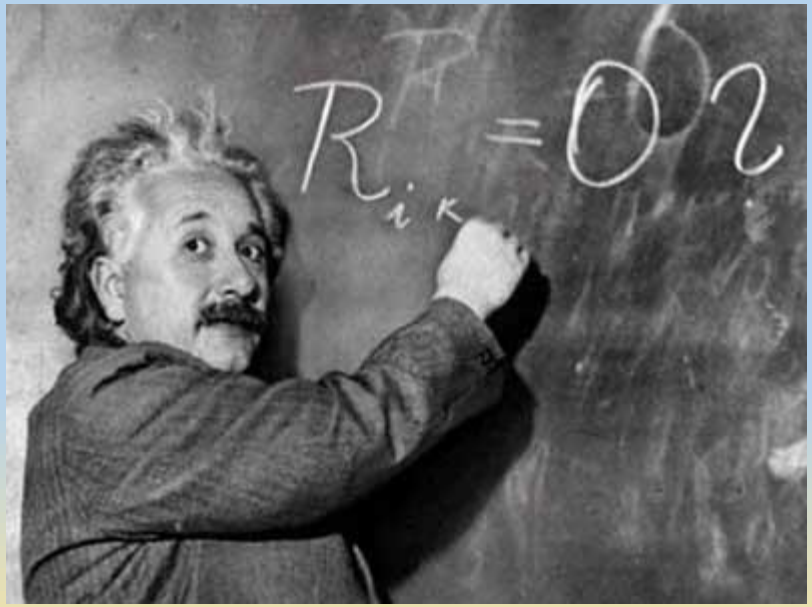
# La geometria EUCLIDEA

**Euclide di Alessandria ( 300 circa a.C.) è il padre della geometria che ancora oggi studiamo. Si narra che un discepolo , dopo aver imparato le prime regole , chiese ad Euclide: "Maestro, cosa guadagnerò imparando queste cose?" ; Euclide chiamò un servo e gli diede ordine di dare qualche moneta al malcapitato, visto che voleva trarre guadagno da ciò che studiava, dopodichè lo cacciò dalla sua scuola.**

Gli enti fondamentali (Euclide li chiama *elementi*) sono i MATTONI della geometria e non si definiscono.

| *ente* | *simbolo* | *modello* |
|---|---|---|
| punto | P maiuscola | P |
| retta | r,s minuscola | |
| piano | α,β lettere greche | |

*Noi onoriamo l'antica Grecia come la culla della civiltà occidentale. Là, per la prima volta, è stato creato un sistema logico, meraviglia del pensiero, i cui enunciati si deducono così chiaramente dagli altri che ciascuna delle proposizioni dimostrate non solleva il minimo dubbio:* ***si tratta della geometria di Euclide****. Quest'opera ammirevole della ragione ha dato al cervello umano la più grande fiducia nei suoi sforzi ulteriori. Colui che nella sua prima giovinezza non ha provato entusiasmo davanti a quest'opera non è nato per fare lo scienziato teorico*.



**Albert Einstein**, ***Come io vedo il mondo***, **1954,**

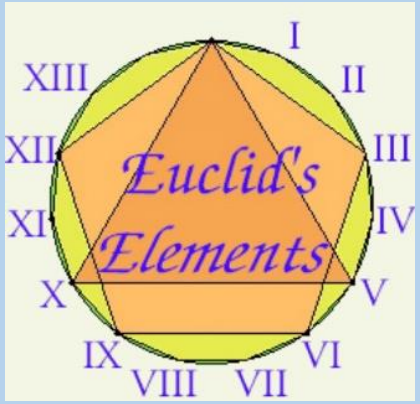
**"La questione del metodo", p. 46**

# Euclide

Il suo libro più famoso, ***Elementi***, è uno dei testi più importanti e influenti della Storia delle Matematiche e ha costituito la base per l'insegnamento della geometria nel mondo occidentale per più di 2000 anni. Gli ***Elementi*** hanno contribuito fortemente a porre uno standard di rigore e di struttura logica.

Poco è noto sulla vita di **Euclide**. Secondo Proclo (410-485 d.C.), l'autore di un prezioso "**Commento sul I° Libro degli *Elementi* di Euclide**", egli fu uno degli ultimi allievi della scuola platonica e visse (durante il regno di Tolomeo I Sotere, 306-283 a.C.), in Alessandria d'Egitto, sede di una celebre scuola scientifica raccolta attorno alla **Biblioteca**, dove si raggiunse il culmine dello sviluppo teorico greco-ellenistico.

# Euclide, *Gli Elementi*




Fin dall'antichità, l'opera euclidea ebbe tanto successo da soppiantare tutti gli altri testi di geometria precedenti.

L'elemento che maggiormente ha influenzato sempre i matematici è l'organizzazione generale degli ***Elementi***, ovvero la scelta felice di un numero molto limitato di assiomi che permettono la dimostrazione di centinaia di teoremi, alcuni dei quali molto profondi, e la concatenazione logica dei teoremi dimostrati. Se noi oggi dovessimo indicare, in una ipotetica graduatoria, l'opera che più di ogni altra ha fatto conoscere all'umanità il concetto di matematica, quello di dimostrazione e il significato di concatenazione logica dei teoremi, dovremmo riferirci all'opera di Euclide.

I libri (oggi si chiamerebbero capitoli) che formano gli ***Elementi***, sono **tredici** e contengono in tutto **467 teoremi**.

# A scuola ….

- Far capire che il nome di «elementi *fondamentali*» non è a caso, ma è dato dal fatti che *stanno a fondamento*, come negli edifici le strutture portanti
- La loro individuazione è opera di un importante processo di astrazione
- È opportuno **imparare a utilizzarne correttamente i termini** piuttosto che chiedere di memorizzare ‘definizioni’
- A partire da situazioni concrete

# *SPOSTAMENTI NELLO SPAZIO E NEL PIANO*

livello 6 – 8 anni

- Esecuzione di spostamenti nello spazio
- Rappresentazione di spostamenti nel piano: avvio allo studio delle linee

# ITINERARIO DIDATTICO

1. *Esecuzione di spostamenti nello spazio*

   1.1Esecuzione di percorsi legati

   - all'esplorazione dell'ambiente
   - al gioco
   - alla fiaba

ESPLORAZIONE DELLO SPAZIO INTERNO ED ESTERNO ALL'EDIFICIO SCOLASTICO finalizzato a:

- Far conoscere ai bambini il nuovo ambiente
- Mettere in rilievo la necessità dei punti di riferimento
- Sperimentare la nozione di verso

ESECUZIONE DI PERCORSI LEGATI AL GIOCO

- I giochi come il girotondo contribuiscono all'intuizione di linea chiusa
- I percorsi e i giochi di lancio della palla possono portare all'intuizione di linea aperta

# ESECUZIONE DI PERCORSI LEGATI AL MONDO FANTASTICO

•Racconti come Pollicino, Cappuccetto Rosso presentano uno svolgimento anche spaziale

IN GENERALE L' ESECUZIONE DI PERCORSI FAVORISCE LO SVILUPPO DELLE CAPACITÀ DI ORIENTAMENTO NELLO SPAZIO

L'esecuzione di percorsi **deve** essere accompagnata dalla **verbalizzazione** e dalla **rappresentazione grafica** che favoriscono la presa di coscienza delle relazioni spaziali e la padronanza del linguaggio (verbale e grafico) .

# VARI TIPI DI PERCORSI

- Percorsi liberi
- Percorsi guidati

ATTENZIONE

I percorsi che si considerano devono essere accompagnati dalla condizione secondo la quale non è possibile “ritornare sui propri passi”

# RIFLESSIONE  E ANALISI

caratteristiche dei percorsi effettuati

- il punto di partenza e il punto di arrivo coincidono
- il punto di partenza e il punto di arrivo sono distinti
- non si passa mai da uno stesso punto.
- si passa più di una volta per uno stesso punto

# ITINERARIO DIDATTICO

## 2. *Rappresentazione di spostamenti nel piano*

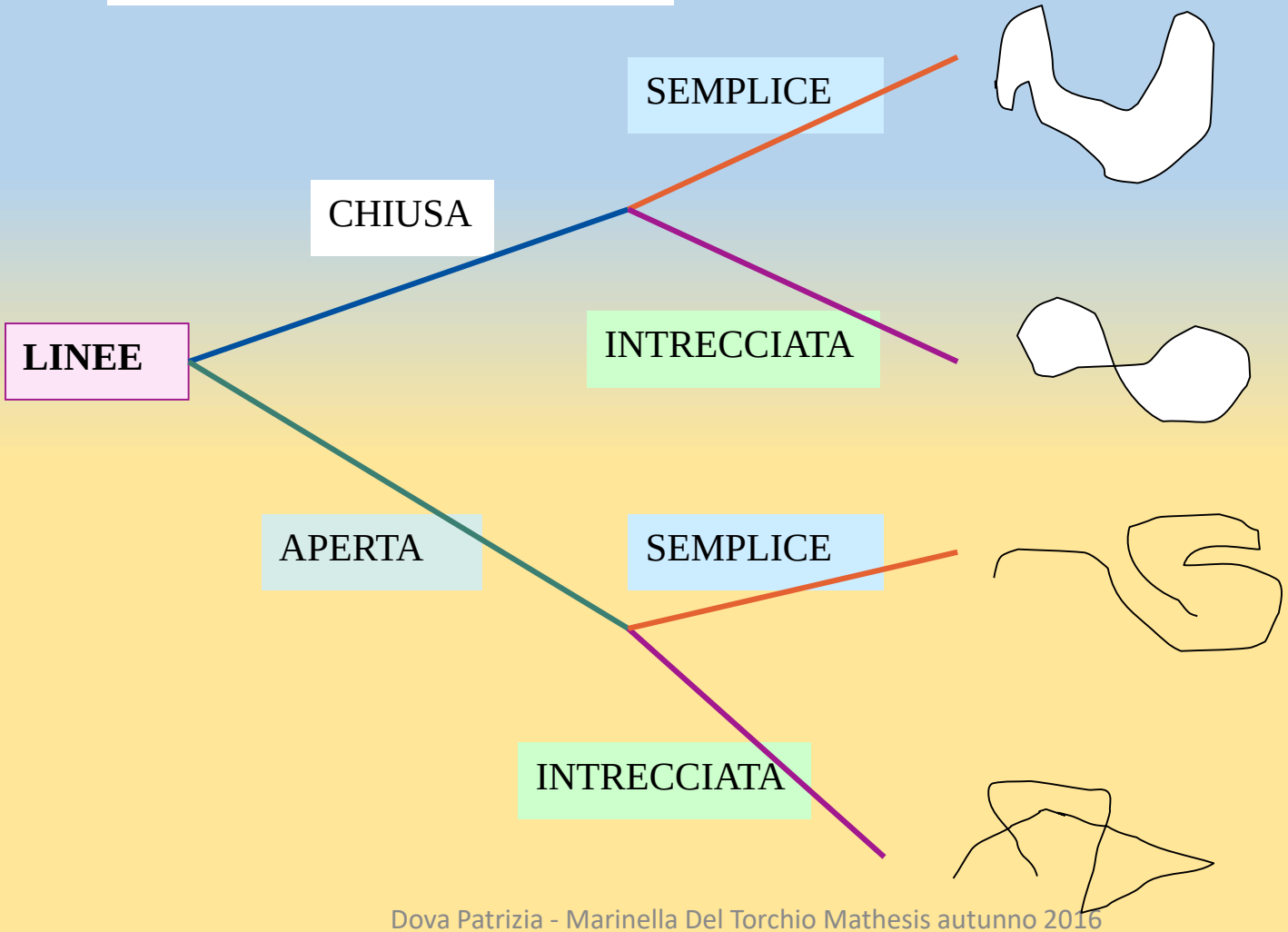
### 2.1 Rappresentazione di percorsi su foglio bianco

- esplicitazione dei concetti di linea e verso

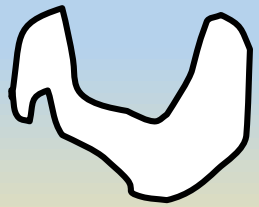
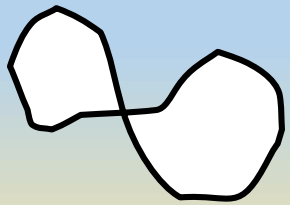
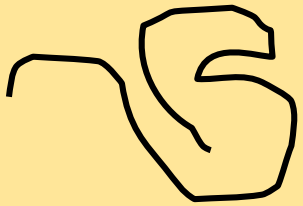
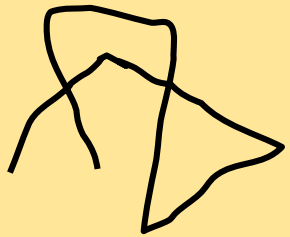
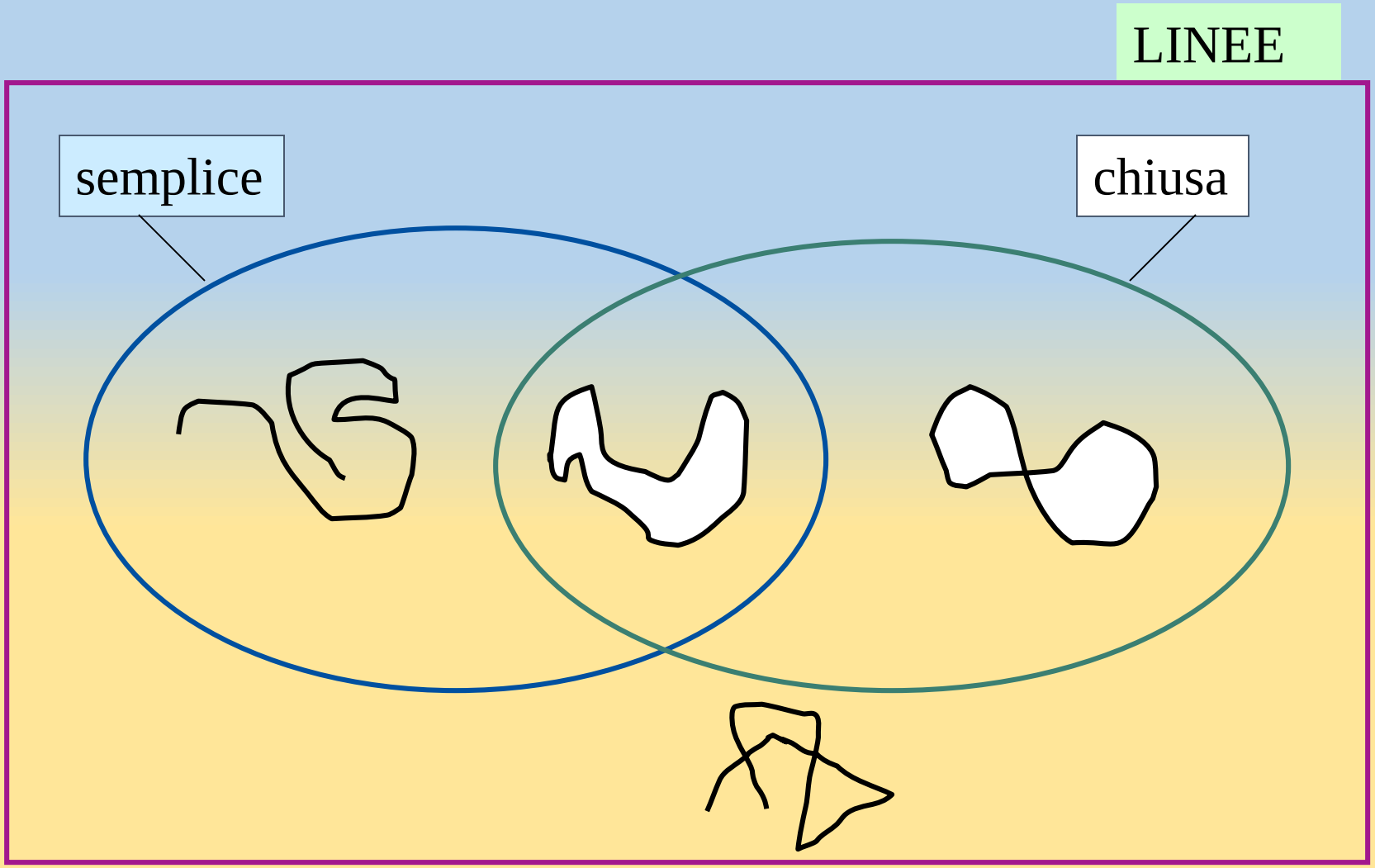
- distinzione di linee aperte/chiuse, semplici/intrecciate, regioni, confini

# CLASSIFICAZIONI E LORO RAPPRESENTAZIONI

Diagramma ad albero



# Diagramma di Carroll

| | SEMPLICE | INTRECCIATA |
|---|---|---|
| CHIUSO |  |  |
| **APERTO** |  |  |

# Diagramma di Eulero - Venn